Huntの定理の紹介 (最大値原理と半群の生成)

宮本, 宗實

数理解析研究所講究録
35 巻 1967 年 18-31

Hunt の定理の紹介

東大 教養　宮本宗實

§1. 完全最大値の原理

$(E, \mathcal{B})$ を measurable space とする．E 上の kernel $V_p = V_p(x, dy)$ $(p>0)$ の系が次の条件をみたすとき，Markovian pseudo-resolvent と呼ぶことにする．

1. $V_\lambda - V_\mu + (\mu - \lambda) V_\lambda V_\mu = 0$ (resolvent equation)

2. $V_\lambda \geqq 0$, $\lambda V_\lambda 1 \leqq 1$

$f \geqq 0$ ならば，$V_\lambda f$ は $\lambda \downarrow 0$ のとき単調に増加する．その極限を $V_0 f = \lim_{\lambda \downarrow 0} V_\lambda f$ とおく．一般の f については，$V_0 f^+ < +\infty$, $V_0 f^- < +\infty$ のときに，$V_0 f = V_0 f^+ - V_0 f^-$ と定義する．この V_0 に対して次の Proposition (the complete maximum principle) が成り立つ．

Proposition. a を non-negative constant, f, g を measurable な non-negative function で $V_0 f < +\infty$, $V_0 g < +\infty$ なるものとする．このとき，

$$a + V_0 f(x) \geqq V_0 g(x) \qquad \text{for} \quad x : g(x) > 0$$

ならば，

$$a + V_0 f \geqq V_0 g \qquad \text{everywhere.}$$

Proof. $u \equiv a + V_0 f$, $g_n \equiv g \wedge n$ とおく．すべての $\lambda > 0$ において，

$$u \geqq V_\lambda g_n \qquad \text{everywhere}$$

となることを示せば良い．

$p>0$ を任意に fix して，$N \equiv p V_{\lambda+p}$ とおく．このとき，

$$p V_\lambda g_n = \sum_{k=1}^{\infty} N^k g_n$$

が成り立つことを見る．実際，resolvent equation から，

$$p V_\lambda = p V_{p+\lambda} + p^2 V_{p+\lambda} V_\lambda = N + N(p V_\lambda),$$
$$= N + N^2 + \cdots + N^{k-1} + N^k (p V_\lambda).$$

従って，$k \uparrow \infty$ のとき，$N^k (p V_\lambda) g_n$ は単調減少である．$\bar{h} \equiv \lim_{k \to \infty} N^k (p V_\lambda) g_n$ とおけば，Lebesgue's theorem により $\bar{h} = p V_{\lambda+p} \bar{h}$ $(= N \bar{h}) \leqq p V_\lambda g_n$．また，resolvent equation より，

$$V_{q+\lambda} \bar{h} = V_{p+\lambda} \bar{h} + (p-q) V_{q+\lambda} V_{p+\lambda} \bar{h}$$
$$= \bar{h}/p + (p-q)/p \, V_{q+\lambda} \bar{h} \qquad \text{for} \quad q > 0.$$

従って，$q V_{q+\lambda} \bar{h} = \bar{h}$．上にみたことから，$\bar{h} \leqq p V_\lambda g_n \leqq \frac{pn}{\lambda}$.

$\bar{h} = q V_{q+\lambda} \bar{h} \leqq q \cdot \frac{pn}{\lambda} V_{q+\lambda} 1 \leqq q \frac{pn}{\lambda} \cdot \frac{1}{q+\lambda} \longrightarrow 0 \quad (q \downarrow 0)$.

故に $\bar{h} = 0$，$p V_\lambda g_n = \sum_{k=1}^{\infty} N^k g_n$ が言えた．

$n \geqq g_n$, $u(x) \geqq V_\lambda g_n(x)$ for $x: g_n(x) > 0$ であるから

$$n + pu(x) \geqq g_n + pV_\lambda g_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} N^k g_n(x) \quad \text{for } x: g_n(x) > 0$$

一方, $n + pu(x)$ は N に関して excessive, すなわち, $n + pu \geqq N(n + pu)$, であるから, 次の Lemma により

$$n + pu \geqq g_n + pV_\lambda g_n \quad \text{everywhere}$$

従って,

$$n/p + u \geqq g_n/p + V_\lambda g_n$$

で $p \to +\infty$ として, $u \geqq V_\lambda g_n$ everywhere.

<u>Lemma</u>. N を E 上の non-negative kernel とする. h を non-negative な函数, v を, N-excessive, すなわち, $Nv \leqq v$, な non-negative function とする. このとき,

$$v(x) \geqq \Big(\sum_{k=0}^{\infty} N^k\Big) h(x) \quad \text{for } x: h(x) > 0$$

ならば,

$$v \geqq \Big(\sum_{k=0}^{\infty} N^k\Big) h \quad \text{everywhere}.$$

§2. 原理の間の関係

E を locally compact, σ-compact, Hausdorff space, $\mathcal{C}_K$ を E 上の compact support の連続函数の全体, $\mathcal{C}_0$ をその uniform norm $\|\cdot\|$ による completion とする. V を, E 上の non-negative kernel で $\mathcal{C}_K$ を $\mathcal{C}_0$ にうつすものとする.

Vについての次の条件に(α), (γ)と名前をつける.

(α) $V(\mathcal{C}_K)$はC_0で dense.

(γ) $0 \leqq {}^\exists h_n \in \mathcal{C}_K$: $Vh_n \uparrow 1$ everywhere.

また, Vについて次のような「原理」を考える. 但し, a は non-negative constant, $f, g \in \mathcal{C}_K$.

(π_1) <u>the complete maximum principle</u>

$f, g \geqq 0$に対して,

$$a + Vf(x) \geqq Vg(x) \quad \text{for } x : g(x) > 0$$

ならば,

$$a + Vf \geqq Vg \quad \text{everywhere}.$$

(π_2) <u>the domination principle</u>

$f, g \geqq 0$に対して,

$$Vf(x) \geqq Vg(x) \quad \text{for } x : g(x) > 0$$

ならば

$$Vf \geqq Vg \quad \text{everywhere}.$$

(π_3) <u>the weak principle of the positive maximum</u>

$\sup Vf(x) > 0$ ならば,

$$\sup Vf(x) = \sup_{x \in P} Vf(x), \quad \text{但し } P = \{x : f(x) > 0\}.$$

(π_4) <u>the principle of the positive maximum</u>

$Vf(x) = \sup Vf$ ならば, $f(x) \geqq 0$.

これらの原理の間に次のような論理的包含関係が成立する.

<u>Proposition 1</u>.

$$\begin{tikzcd}
(\pi_1) & {} \arrow[l, Rightarrow, "(\beta)", "2"'] \arrow[r, Rightarrow, "1"'] & (\pi_2) \\
{} \arrow[u, Rightarrow, "3"'] \arrow[d, Rightarrow, "4"'] & & \\
(\pi_3) & {} \arrow[l, Rightarrow, "5"'] \arrow[r, Rightarrow, "(\alpha)", "6"'] & (\pi_4)
\end{tikzcd}$$

Proof.

1. (π_1) で $a=0$ とおけば良い.

2. 任意に $b>a$ を fix する. このとき, $n\to+\infty$ において

$$V(f+bh_n)(x) \uparrow b+Vf(x) \quad > a+Vf(x) \geqq Vg(x)$$

が $x: g(x)>0$ において成り立つ. Diniの定理により, 十分大なる n において,

$$V(f+bh_n)(x) \geqq Vg(x) \qquad \text{for } x: g(x)>0.$$

(π_2) により,

$$V(f+bh_n) \geqq Vg \qquad \text{everywhere}.$$

最初に $n\to+\infty$, 次に $b\downarrow a$ とすることにより,

$$a+Vf \geqq Vg \qquad \text{everywhere}.$$

3. $a+Vf(x) \geqq Vg(x)$ for $x: g(x)>0$ とする. $h\equiv g-f$ とおけば, $f\geqq 0$ なる故 $\{h>0\}\subset\{g>0\}$. 従って,

$$a \geqq Vh(x) \qquad \text{for } x: h(x)>0.$$

すなわち，　$a \geqq \sup_{x \in P} \nabla h(x)$，但し $P = \{h > 0\}$．

もし，$\sup \nabla h \leqq 0$ ならば　$a \geqq \nabla h$　everywhere．従って，$a + \nabla f \geqq \nabla g$　everywhere．

もし，$\sup \nabla h > 0$ ならば，(π_3) によって，$\sup \nabla h = \sup_{x \in P} \nabla h(x) \leqq a$．従って，$a \geqq \nabla h$　everywhere，すなわち，$a + \nabla f \geqq \nabla g$　everywhere．

4.　$a \equiv \sup_{x \in P} \nabla f(x)$，　$a^+ \equiv a \vee 0$　とおく．

$$a^+ \geqq \nabla f(x) = \nabla f^+(x) - \nabla f^-(x) \quad \text{for} \quad x \in P.$$

すなわち，

$$a^+ + \nabla f^-(x) \geqq \nabla f^+(x) \quad \text{for } x : f^+(x) > 0$$

(π_1) により，

$$a^+ + \nabla f^- \geqq \nabla f^+ \quad \text{everywhere}.$$

すなわち，

$$a^+ \geqq \nabla f \quad \text{everywhere},$$

$$a^+ \geqq \sup \nabla f.$$

右辺は仮定により positive．故に，$a^+ > 0$　$\therefore a^+ = a$．従って，

$$a \geqq \sup \nabla f.$$

逆向きの不等式は明らかだから，$\sup \nabla f = \sup_{x \in P} \nabla f(x)$．

5.　$a \equiv \sup \nabla f > 0$ と仮定する．$0 < \varepsilon < \frac{a}{3}$ なる任意の ε をとる．$\nabla f \in C_0$ だから，compact F をてきとうにとれば，

$$|Vf(x)| < \varepsilon \qquad \text{for } x \in F^c$$

とすることができる。また、あきらかに、

$$\exists g \in \mathcal{C}_K^+ : \quad g > 0 \text{ on } F, \quad Vg < \varepsilon \text{ everywhere.}$$

(π_4)により、$V(f-g)$は$\{x : (f-g)(x) < 0\}$上では最大値をとり得ない。従って、$\{f \leqq 0\} \cap F$上では最大値をとり得ない。

一方、

$$V(f-g)(x) \leqq Vf(x) \leqq \varepsilon \qquad x \in F^c$$

$$\sup V(f-g) \geqq a - \varepsilon \geqq 2\varepsilon$$

であるから、$V(f-g)$はF^c上でも最大値をとり得ない。従って、$V(f-g)$は$\{x : f > 0\} \cap F$上でのみ最大値をとる。故に

$$\sup_{f(x)>0} Vf(x) \geqq \sup_{f>0} V(f-g)(x) = \sup V(f-g) \geqq a - \varepsilon.$$

$\varepsilon \to 0$として、$\sup_{f>0} Vf \geqq a$を得る。

6. $Vf(x) = \sup Vf \geqq 0$とする。Uをxの任意のcompact neighbourhoodとする。(α)により、次の条件をみたす$g \in \mathcal{C}_K$が存在する：

$$Vg(x) > 0$$

$$Vg(x) > \sup_{y \in U^c} Vg(y).$$

$\varepsilon > 0$を任意にfixする。

$$\sup V(f + \varepsilon g) \geqq Vf(x) + \varepsilon Vg(x) > 0.$$

$y \in U^c$に対して

$$V(f + \varepsilon g)(y) < Vf(x) + \varepsilon Vg(x) \leqq \sup V(f + \varepsilon g).$$

従って，$V(f+\varepsilon g)$ の positive な maximum は U の上で attain され，U^c 上では attain されない．従って，(π_3) により $x_0 \in U$ が存在して，$V(f+\varepsilon g)(x_0) = \sup V(f+\varepsilon g)$，$f(x_0)+\varepsilon g(x_0) > 0$．$U$，$\varepsilon$ は任意だから，$f(x) \geqq 0$．

<u>Proposition 2</u>　(π_2)を仮定する．

$(I+V)f = 0$ ならば $f = 0$．

Proof.　$(I+V)f = 0$ とする．$Vf^+ + f^+ = Vf^- + f^-$．$x : f^+(x) > 0$ において，$f^-(x) = 0$ であるから，$Vf^+(x) \leqq Vf^-(x)$．故に (π_2) により，$Vf^+ \leqq Vf^-$ everywhere．従って $f^+ \geqq f^-$．同様に $f^+ \leqq f^-$．故に $f^+ = f^-$，この両辺は従って 0 になる．

<u>Proposition 3</u>．(π_4)を仮定する．

$Vf = 0$ ならば $f = 0$．

Proof は自明

§3．Hunt の定理

E，C_0，C_Kは前§と同じ．

<u>Theorem</u>　VはC_KをC_0にうつす non-negative kernel で the complete maximum principle (π_2) を満たすものとする．このとき，C_0 上の pseudo-resolvent $\{V_p\}_{p>0}$で次の条件をみたすものが存在する．

1) $V_\lambda - V_\mu + (\mu - \lambda) V_\lambda V_\mu = 0$

2) $Vf = V_\lambda (\lambda Vf + f) = (\lambda Vf + f) V_\lambda f \qquad f \in \mathcal{C}_K$

3) $0 \leqq V_\lambda \ , \quad \| \lambda V_\lambda \| \leqq 1$

4) $\lim\limits_{\lambda \downarrow 0} V_\lambda f = Vf \qquad f \in \mathcal{C}_K$

Remark. 4) は 2, 3) より出る.

任意の $f \in \mathcal{C}_K^+$ に対して, 2) より, $Vf - V_\lambda f = \lambda V_\lambda Vf \geqq 0$. 故に, $\lambda V_\lambda f \leqq \lambda Vf$. 従って $s\text{-}\lim\limits_{\lambda \downarrow 0} \lambda V_\lambda f = 0$. 故に任意の $f \in \mathcal{C}_K$ に対して, $s\text{-}\lim\limits_{\lambda \downarrow 0} \lambda V_\lambda f = 0$. $\mathcal{C}_K$ は $\mathcal{C}_0$ で dense であり, $\| \lambda V_\lambda \| \leqq 1$ であるから, 任意の $f \in \mathcal{C}_0$ に対して, $s\text{-}\lim\limits_{\lambda \downarrow 0} \lambda V_\lambda f = 0$. 従って, $f \in \mathcal{C}_K^+$ に対して, $0 \leqq Vf - V_\lambda f = \lambda V_\lambda (Vf) \longrightarrow 0 \quad (\lambda \downarrow 0) \quad (\because \ Vf \in \mathcal{C}_0)$. 故に, 任意の $f \in \mathcal{C}_K$ に対して, $s\text{-}\lim\limits_{\lambda \downarrow 0} V_\lambda f = Vf$.

Proof of Theorem.

1° Bounded case. $\|V\| < +\infty$ と仮定する. このとき, V は $\mathcal{C}_0$ 上まで拡張できて, $\mathcal{C}_0$ 上で the complete maximum principle をみたす.

$0 < \lambda < \|V\|^{-1}$ に対して, $V_\lambda \equiv \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-\lambda)^k V^{k+1}$ とおく. 1, 2, 4) は自明. V_λ が non-negative であることを示す. $g \in \mathcal{C}_0$, $g \leqq 0$ とする. 2) から, $V_\lambda g = V(g - \lambda V_\lambda g)$ ある x で $V_\lambda g(x) > 0$ とすると,

$$0 < \sup V_\lambda g = \sup V(g - \lambda V_\lambda g)$$

右辺は，(π_3) $[=(\pi_1)]$ により，次に等しい：

$$\sup\{V(g-\lambda V_\lambda g)(y) \mid y : g(y)-\lambda V_\lambda g(y)>0\}$$
$$=\sup\{V_\lambda g(y) \mid y : g(y)-\lambda V_\lambda g(y)>0\}.$$

しかし，もし $g(y)-\lambda V_\lambda g(y)>0$ ならば，

$$0 \geqq g(y) > \lambda V_\lambda g(y)$$

従って，$\sup\{V_\lambda g(y) \mid \quad " \quad\} \leqq 0$．これは矛盾．従って，$V_\lambda g \leqq 0$.

次に V_λ の norm を評価する．$f \in C_K^+$，$\|f\| \leqq 1$ に対して，

$$1 \geqq f(x) \geqq \lambda V_\lambda f(x) \qquad \text{for } x : f(x)-\lambda V_\lambda f(x)>0$$

右辺 $= V[\lambda(f-\lambda V_\lambda f)](x)$ であるから，

$$1 \geqq V[\lambda(f-\lambda V_\lambda f)](x) \qquad \text{for } x : f(x)-\lambda V_\lambda f(x)>0.$$

(π_1) により，

$$1 \geqq V[\lambda(f-\lambda V_\lambda f)]=\lambda V_\lambda f \qquad \text{everywhere}.$$

$f \uparrow 1$ として，$1 \geqq \lambda V_\lambda 1$．$V_\lambda$ は non-negative だから，$\|\lambda V_\lambda\| = \lambda V_\lambda 1 \leqq 1$.

2° General case. E は σ-compact であるから，compact な集合 K_n が存在して，$E=\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$．$f_n \in C_K^+$，$\|f_n\| \leqq 1$，$K_n$ 上で $f_n=1$ なる函数 f_n をとる．仮定から，$Vf_n \in C_0$．正の実数列 λ_n を，$\sum \lambda_n < +\infty$，$\sum \lambda_n \|Vf_n\| < +\infty$ となるようにとる．$a \equiv \sum \lambda_n f_n$ とおけば，$0<a \in C_0$,

故 $Va \in C_0$. また, $a_n \equiv (na) \wedge 1$ とおけば, $0 < a_n \in C_0$, $Va_n \in C_0$.

$f \in C_K$ に対して, $V^{(n)} f = V(a_n f)$ と定義すれば, $V^{(n)}$ は, C_K から C_0 への bounded mapping で, the complete maximum principle をみたす。従って $1°$ により, pseudo-resolvent $V_\lambda^{(n)}$ が C_0 上に存在する。この $V_\lambda^{(n)}$ に対して次の不等式(*)が成り立つ.

$$(*) \quad n < m,\ f \in C_K^+ \Rightarrow V_\lambda^{(n)}\left(\frac{f}{a_n}\right) \geqq V_\lambda^{(m)}\left(\frac{f}{a_m}\right)$$

これを見るために, $k_j \equiv V_\lambda^{(j)}\left(\frac{f}{a_j}\right)$ $(j = n, m)$ とおく.

$$k_n = V_\lambda^{(n)}\left(\frac{f}{a_n}\right) = V^{(n)}\left(\frac{f}{a_n}\right) - \lambda V^{(n)} V_\lambda^{(n)}\left(\frac{f}{a_n}\right)$$

$$= V^{(n)}\left(\frac{f}{a_n} - \lambda V_\lambda^{(n)}\left(\frac{f}{a_n}\right)\right)$$

$$= V(f - \lambda a_n k_n)$$

同様に,

$$k_m = V(f - \lambda a_m k_m).$$

従って,

$$k_m - k_n = \lambda V(a_n k_n - a_m k_m).$$

$\max(k_m - k_n) > 0$ ならば, (π_3) the weak principle of the positive maximum により, ある $x \in E$ に対して,

$k_m(x) - k_n(x) = \max(k_m - k_n) > 0$, $a_n(x)k_n(x) - a_m(x)k_m(x) > 0$ が成り立つ。$a_n(x) \leqq a_m(x)$ であるから、これは矛盾。従って(#)が成りたつ。

$f \in \mathcal{C}_K^+$ に対して $V_\lambda^{(n)}(\frac{f}{a_n})$ は $n \uparrow +\infty$ のとき、単調減少であるから、その極限を $V_\lambda f = \lim_{n\to\infty} V_\lambda^{(n)}(\frac{f}{a_n})$ とおく。$V_\lambda f$ は upper semi-continuous であり、$V_\lambda f = \lim V_\lambda^{(n)} f$ となる。$\|\lambda V_\lambda^{(n)}\| \leqq 1$ であるから、任意の $f \in \mathcal{C}_0$ に対して、$\lim_{n\to+\infty} V_\lambda^{(n)} f$ が存在する、これを $V_\lambda f$ とかくことにする。とくに $0 \leqq f \in \mathcal{C}_0$ ならば、$V_\lambda f$ は upper semi-continuous である。また $\|\lambda V_\lambda\| \leqq 1$ も自明である。

$f \in \mathcal{C}_K^+$ に対して、仮定から $Vf \in \mathcal{C}_0^+$、上述したことから、

$$V_\lambda Vf = \lim V_\lambda^{(n)} Vf \quad : \text{upper semi-continuous}$$

$$\begin{aligned}\lambda V_\lambda^{(n)} Vf &= \lambda V_\lambda^{(n)} V^{(n)}(\tfrac{f}{a_n}) \\ &= V_0^{(n)}(\tfrac{f}{a_n}) - V_\lambda^{(n)}(\tfrac{f}{a_n}) \\ &= Vf - V_\lambda^{(n)}(\tfrac{f}{a_n})\end{aligned}$$

上式の最右辺は、上にみたことから、単調増大で、Vf で上からおさえられている。従って、

$$\lambda V_\lambda Vf = \lim_{n\to+\infty}(Vf - V_\lambda^{(n)}(\tfrac{f}{a_n})) : \text{lower semi-continuous}.$$

従って、$\lambda V_\lambda Vf$ は continuous で Vf で上からおさえ

られている。故に，$\lambda V_\lambda Vf \in \mathcal{C}_0^+$. 従って任意の $f \in \mathcal{C}_K$ に対して，$\lambda V_\lambda Vf \in \mathcal{C}_0$.

$f \in \mathcal{C}_K$ に対して，

$$V_\lambda^{(n)} f = V^{(n)} f - \lambda V_\lambda^{(n)} V^{(n)} f$$

であるから，$n \to +\infty$ として，

$$V_\lambda f = Vf - \lambda V_\lambda Vf .$$

右辺第一項は仮定から，第二項は上にみたことから，$\mathcal{C}_0$ の函数である。故に，$V_\lambda f \in \mathcal{C}_0$。従って，$f \in \mathcal{C}_0$ に対しても，$V_\lambda f \in \mathcal{C}_0$。

1), 2) を示すためには，$V_\lambda^{(n)}$ についての 1, 2) 式で $n \to +\infty$ とすれば良い。

Remark. $\overline{\mathcal{C}} = \{ f : \text{continuous on } E, \ \exists \lim_{x \to \infty} f(x) \}$ とおく。V が $\mathcal{C}_K$ を $\overline{\mathcal{C}}$ にうつす kernel であるときには，上の Theorem は一般には成り立たない。これをみるために次のような example を示す。

U_p を R^3 上の Brown 運動の resolvent とする。U_0 すなわち Newtonian potential kernel は $\mathcal{C}_K(R^3)$ を $\mathcal{C}_0(R^3)$ にうつす。$E = R^3 \cup \{\partial\}$ とおき，∂ は isolated point とする。$f \in \mathcal{C}_K = \mathcal{C}_K(E)$ に対し，V を次のように定義する：

$$Vf(x) = \begin{cases} U_0 f|_{R^3}(x) + f(\partial) & , \quad x \in R^3 \\ f(\partial) & , \quad x = \partial . \end{cases}$$

V は $\mathcal{C}_K$ を $\overline{\mathcal{C}}$ にうつし，the complete maximum principle をみたす．Theorem の 1〜4) をみたす pseudo-resolvent $\{V_p\}$ が $\overline{\mathcal{C}}$ 上に存在したとしよう．

$f(\partial)=0$ なる $f\in\mathcal{C}_K$ をとる．これに対して，

$$g(x)\equiv g_f(x)\equiv\begin{cases}U_p f|_{R^3}(x), & x\in R^3\\ 0, & x=\partial\end{cases}$$

とおけば，

$$(I+pV)g=Vf$$

$$(I+pV)V_p f=Vf$$

であるから，§2 Proposition 2 により $g=V_p f$．U_p は conservative であるから，$f\uparrow\chi_{R^3}$ ならば，$g_f\uparrow p^{-1}\chi_{R^3}$．従って，$\chi_{R^3}=pV_p\chi_{R^3}$．一方，

$$pV_p(\chi_{R^3}+\chi_\partial)=pV_p 1\leqq 1=\chi_{R^3}+\chi_\partial$$

従って，$pV_p\chi_\partial\leqq\chi_\partial$．故に，$x\in R^3$ に対して，$V_p\chi_\partial(x)=0$．これは 4) に反する．($V\chi_\partial(x)=1$)．